Die thermische Bewegung der Elektronen im Festkörper eines Widerstands erzeugt an dessen Enden eine Spannung $u(t)$, die, als Funktion der Zeit betrachtet, stochastisch schwankt. Ihr zeitlicher Mittelwert verschwindet, der Mittelwert des Quadrats von $u(t)$ dagegen ist ungleich Null:

(1) $$\overline{u^2(t)} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} u^2(t)\,dt > 0 .$$

Wir setzen voraus, dass die Mittelwerte von $u(t)$ und $u^2(t)$ nicht von der Zeit abhängen. Dann lässt sich nach *Nyquist* folgende Überlegung anstellen: Betrachte zwei identische Widerstände R, die sich im thermischen Gleichgewicht befinden und über eine verlustfreie Leitung der Länge L miteinander verbunden sind (Abbildung 1). Der Wellenwiderstand der Leitung sei gleich dem Wert R der Widerstände, so dass optimale Anpassung vorliegt. Dann können sich auf dem Wellenleiter stehende Wellen ausbilden, die von den Rauschspannungen der Widerstände mit Energie versorgt werden.

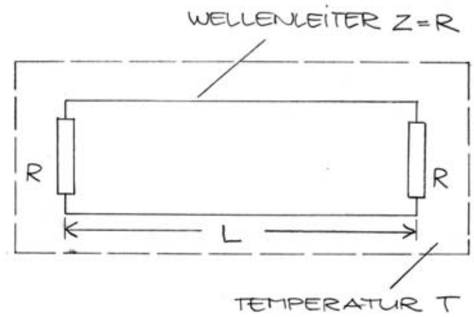

Abbildung 1 Nyquists Gedankenexperiment. Widerstände und Wellenleiter befinden sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T. Der Wellenleiter ist verlustfrei, sein Wellenwiderstand Z ist gleich dem Widerstandswert R, so dass optimale Anpassung vorliegt. Auf dem Wellenleiter bilden sich stehende Wellen, die durch die Rauschspannung der Widerstände mit Energie versorgt werden.

Wir betrachten einen der beiden „Rauschgeneratoren", beispielsweise den in Abbildung 1 am linken Ende der Leitung liegenden Widerstand. Damit er elektrische Energie an den Wellenleiter abgibt, muss seine Rauschspannung $u(t)$ einen Strom $i(t)$ durch die beiden Widerstände treiben, für den gilt

(2) $$i(t) = \frac{u(t)}{2R} .$$

Die Rauschleistung P, die auf dem Wellenleiter transportiert wird, ist dann

(3) $$P = \overline{u(t)\cdot i(t)} = R\cdot\overline{i^2(t)} = R\cdot\frac{\overline{u^2(t)}}{4R^2} = \frac{1}{4R}\cdot\overline{u^2(t)} .$$

Die Leistung P wird durch elektromagnetische Wellen transportiert. Deren Frequenzen sind wegen der Randbedingungen (Schwingungsknoten an den beiden Enden der Leitung) nicht beliebig: Ihre Wellenlänge λ muss der Bedingung

(4) $$\lambda_k = \frac{2L}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

genügen – das heißt, L muss ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ sein. Da sich die Wellen mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, gilt für deren Frequenzen f_k

(5) $$f_k = \frac{c}{\lambda_k} = k\frac{c}{2L} .$$

Wir sind an der Anzahl Δk der Schwingungsmoden im Frequenzintervall von f bis $f + \Delta f$ interessiert, da die Rauschleistung bzw. -spannung in diesem Intervall gemessen werden soll. Diese Anzahl ist

(6) $$\Delta k = \frac{2L}{c} \cdot \Delta f \ .$$

Der Quotient L/c ist die Zeit Δt, die die Welle benötigt, um von einem Ende des Leiters zum anderen zu gelangen. Also gilt

(7) $$\Delta k = 2\,\Delta t \cdot \Delta f \ .$$

Die nachfolgende Argumentation greift auf die Überlegungen *Plancks* zurück. Danach beträgt die mittlere Energie einer Schwingungsmode der Frequenz f im thermischen Gleichgewicht

(8) $$\overline{W(f,T)} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \ .$$

Dabei ist h die Plancksche Konstante $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js, k_B die Boltzmannkonstante $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K und T die absolute Temperatur des „Systems" Wellenleiter und Widerstände. Die Energie aller Δk Moden im Frequenzintervall von f bis $f + \Delta f$ ist dann

(9) $$\overline{W} = \overline{W(f,T)}\,\Delta k = \frac{2L}{c} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \Delta f \ .$$

Diese Energie wird von jedem der beiden Widerstände in der Zeit Δt in den Wellenleiter eingespeist. Die Rauschleistung P im Frequenzintervall Δf eines der beiden Widerstände ist damit

(10) $$P = \frac{1}{2}\frac{\overline{W}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2L}{c}\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2L}{c}\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\Delta f}{\frac{L}{c}} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\Delta f \ .$$

Nach (3) ist dann

(11) $$\overline{u^2(t)} = 4R \cdot P = 4R \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\Delta f \ .$$

Das ist die mittlere quadratische Rauschspannung im Frequenzintervall Δf als Funktion der Frequenz f.

Bei normalen Umgebungstemperaturen ist der Exponent der e-Funktion im Nenner von (11) klein. Für $T = 300$ K ist zum Beispiel

$$\frac{h}{k_B T} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 300\,K} \cong 1{,}6 \cdot 10^{-13}\,\frac{1}{Hz} \quad ,$$

so dass $hf/(k_B T)$ für Frequenzen unterhalb 60 GHz kleiner als 0,01 bleibt. In diesem Fall kann man die Entwicklung der e-Funktion nach dem zweiten Term abbrechen und schreiben

$$e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \cong 1 + \frac{hf}{k_B T} - 1 = \frac{hf}{k_B T} \quad .$$

Das ergibt die *Nyquist-Formel*

(13) $$\overline{u^2(t)} = 4 k_B R T \Delta f \ .$$

Literatur und Anmerkungen

[1] siehe z. B. *R. Scholz*: Crashkurs Rauschen, Praktikum Physik, Leibniz-Universität Hannover, 2012, www.praktikumphysik.uni-hannover.de/fileadmin/.../AP/.../Crash_Rauschen.pdf